Эта часть работы выложена в ознакомительных целях. Если вы хотите получить работу полностью, то приобретите ее воспользовавшись формой заказа на странице с готовой работой: [*https://studservis.ru/gotovye-raboty/kursovaya-rabota/162097*](https://studservis.ru/gotovye-raboty/kursovaya-rabota/162097)

Тип работы: Курсовая работа

Предмет: Аналитическая геометрия

Содержание
стр.

Введение.
При исследовании свойств геометрических фигур наиболее эффективными методами являются методы, основанные на использовании классических математических дисциплин с подробно разработанным математическим аппаратом.
Так, например, в разделе математики, называемом аналитической геометрией, изучаются свойства основных геометрических фигур основываясь на алгебраических методах. В аналитической геометрии опираясь на понятия системы координат на плоскости и в трёхмерном пространстве описаны способы задания прямых, плоскостей, кривых и поверхностей второго порядка, позволяющие решать многочисленные геометрические задачи. Также приведена полная классификация и описаны основные геометрические свойства кривых и поверхностей второго порядка.
Однако методы аналитической геометрии не позволяют описать, например, такие характеристики геометрических линий как кривизна и кручение, задавать и изучать свойства геометрических фигур более общего вида. Такие свойства можно изучить, опираясь на методы, разработанные в курсе математического анализа.
Раздел математики, изучающий свойства геометрических образов с помощью методов математического анализа, называется дифференциальной геометрии.
Объектом исследования данной курсовой работы являются две замечательные линии, называемые эволюта и эвольвента. Эти кривые не входят в курс аналитической геометрии так как для их изучения недостаточно использование методов классической алгебры, а необходимо применение методов математического анализа.
Предмет исследования в курсовой работе – аналитическое и практическое построение эволюты и эвольвенты.
Цель работы – изучение и освоение различных аналитических и практических методов построения эволюты и эвольвенты.
Задачи:
- рассмотрение теоретических основ введения эволюты и эвольвенты;

- описание и вычисление таких геометрических понятий как центр и радиус кривизны кривой, средней кривизны и кривизны кривой в данной точке;
- аналитические способы задания эволюты и эвольвенты;
- описание основных свойств эволюты и эвольвенты;
- указание практических способов построения этих кривых.
- аналитическое определение и построение эволют и эвольвент классических кривых второго порядка.

Эволюты и эвольвенты играют важную роль при построении и исследовании кривых линий. Широкое применение в технике находит эвольвента окружности так как форму эвольвенты окружности имеют профили зубьев различных зубчатых передач (см. приложение I).

1 Теоретическая часть

Теоретические основы определения уравнений эволюты и эвольвенты, их основные свойства и методы построений

1.1 Вспомогательные понятия

Для того, чтобы перейти к рассмотрению понятий эволюты и эвольвенты, необходимо ввести такие вспомогательные понятия, как кривая, кривизна кривой, радиус и центр кривизны.

1.1.1 Понятие кривой

Вначале рассмотрим понятие кривой, которое вводится курсе дифференциальной геометрии.
Математически строгое определение кривой базируется на понятии вектор-функции $\vec{r}(t)$ скалярного аргумента. Эту функцию будем считать непрерывной на отрезке [a, b].
Рассмотрим в трёхмерном пространстве R^3 прямоугольную декартову систему координат Oxyz с ортонормированным базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
Определение 1. Множество $\Gamma \subset R^3$ точек, заданных радиус-вектором

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k},\quad t \in [a,b],$$

где вектор-функции $\vec{r}(t)$ является непрерывной на отрезке [a, b] называется непрерывной кривой, или просто кривой, а аргумент t – параметром этой кривой.
Заданную таким образом кривую называют годографом вектор-функции $\vec{r}(t)$, так как при изменении параметра t эту кривую описывает в пространстве конец этого вектора.
При фиксированном значении параметра $t = t_0 \in [a, b]$, значения $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$ являются координатами точки кривой. Поэтому одна и та же кривая может иметь как векторное, так и координатное представление:

$$\Gamma = \{\vec{r} \in R^3 : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a,b]\},\ \text{или}$$

$$\Gamma = \{(x; y; z) \in R^3 : x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [a, b]\}$$

Кривую можно определить и как линию пересечения двух поверхностей, заданных уравнениями $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$, составив и решив для этого систему из уравнений этих поверхностей.
Выбирая в качестве параметра одну из координат, можно выразить из этой системы уравнений остальные координаты этой кривой.
В случае, когда одной и той же точке кривой соответствуют различные значения параметра t, точку называют кратной точкой этой кривой.
Точки, соответствующие радиус-векторам $\vec{r}(a)$ и $\vec{r}(b)$ называются начальной и конечной точками этой кривой, соответственно.
Когда конечная и начальная точки кривой совпадают кривую называют замкнутой, а замкнутую кривую, которая не имеет кратных точек при $t \in (a, b)$ называют простым замкнутым контуром.
Определение 2. Кривая, все точки которой расположены в некоторой плоскости, называется плоской. В случае, когда плоскость является координатной плоскостью xOy, координатное представление плоской кривой Γ будет иметь следующий вид:

$\Gamma=\{(x;y;z) \in R^3: x=x(t), y=y(t), z=0, t \in [a,b]\}$.

причём равенство z = 0 обычно опускают и пишут

$\Gamma=\{(x;y) \in R^2: x=x(t), y=y(t), t \in [a,b]\}$.

График непрерывной на отрезке [a, b] функции f(x) является плоской кривой с координатным представлением

$\Gamma=\{(x;y) \in R^2: x=x, y=f(x), x \in [c,d]\}$.

В этом случае аргумент x играет роль параметра, а плоская кривая является годографом радиус-вектора

$\vec{r}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\vec{j}$ или $\vec{r}(x)=x\vec{i}+f(x)\,\vec{j}$,

соответственно.

1.1.2 Кривизна плоской кривой

Производная первого порядка функции y = f(x), описывает простейшую характеристику линии, а именно её направление. Оказывается, что производная второго порядка даёт возможность описать другую важную характеристику линии, так называемую кривизну, которая определяет меру изогнутости или искривлённости данной линии.
Рассмотрим кривую, не имеющую кратных точек и имеющую в каждой своей точке некоторую касательную. Обозначим через α угол между касательными к этой кривой в каких-нибудь двух её точках A и B, или – точнее – угол поворота касательной при переходе от точки A к точке B (рис. 1).
Такой угол называется углом смежности. Угол смежности даёт наглядное представление о степени изогнутости дуги. У двух дуг, имеющих одинаковую длину, больше изогнута та, у которой угол смежности больше (рис. 1, 2).

Полной характеристику изогнутости кривой определяет отношение угла смежности к длине соответствующей дуги.
Определение 3. Отношение угла смежности α к соответствующей длине дуги называется средней кривизной Кср дуги $\overset{\frown}{AB}$:

Средняя кривизна одной и той же кривой (дуг) для двух различных её частей может быть различной; так, например, для кривой (рис. 3) средняя кривизна

дуги AB не равна средней кривизне дуги A1B1, хотя длины этих дуг равны между собой.
Вблизи разных своих точек кривая может быть искривлена по-разному. Степень искривлённости линии в непосредственной близости к некоторой её точке A характеризует понятие кривизны в данной точке.
Определение 4. Предел средней кривизны дуги AB, в случае, когда длина этой дуги стремится к нулю, называется кривизной Ka этой линии в точке A:

1.1.3 Вычисление кривизны

Получим формулу для вычисления кривизны данной линии в любой её точке M(x, y). При этом считаем, что кривая задана в декартовой системе координат функцией вида y = f(x) и эта функция имеет непрерывную производную второго порядка.

Рассмотрим касательные к кривой в точках M и M1 с абсциссами x и x + □x и обозначим через □ и □ + □□ углы наклона этих касательных (рис. 4).
Длину дуги □M0M отсчитываемую от некоторой постоянной точки M0,

обозначим через s; тогда □s = □M0M1 – □M0M, а□□s□ = □MM1.
На рисунке 4 видно, что угол смежности, соответствующий дуге □MM1 равен абсолютной величине разности углов □ и □ + □□, другими словами, равен □□□□.
Учитывая определение средней кривизны кривой на участке □MM1 имеем

$K_{ср}=|\Delta\varphi|/|\Delta s| =\Delta\varphi/\Delta s$.
Чтобы вычислить кривизну в точке M найдём предел последнего выражения при условии, что длина дуги □MM1 стремится к нулю:

Учитывая, что □ и s зависят от x, величину □ можно рассматривать как функцию от s. Будем считать, что эта функция задана параметрически с
с помощью параметра x. Тогда

$\lim_{\Delta s\to 0} \Delta\varphi/\Delta s = d\varphi/ds$, откуда $K=|d\varphi/ds|$

Для вычисления воспользуемся формулой дифференцирования функции, заданной параметрически:

.

Чтобы выразить производную через функцию y = f(x), воспользуемся тем, что а, следовательно, .
Дифференцируя по x последнее равенство, получаем, что

.
Отсюда, учитывая, что , имеем
,

и окончательно, так как , получим
.

Следовательно, в каждой точке кривой, в которой непрерывна производная второго порядка, кривизну можно вычислить по указанной выше формуле.
Получим формулы для вычисления кривизны линии, заданной параметрически.
Рассмотрим кривую заданную параметрическими уравнениями:

x = □(t), y = □(t).

Тогда

,

Подставляя полученные выражения в формулу кривизны кривой, получаем

.

Далее укажем формулы для вычисления кривизны линии, которая задана уравнением в полярных координатах.
Предположим, что кривая задана уравнением □ = f(□).
Запишем формулы перехода от полярных координат к декартовым:
x = □·cos□, y = □·sin□.

Заменяя в этих формулах □ на f(□), получаем

x = f(□)cos□, y = f(□)sin□

Последние уравнения являются параметрическими уравнениями кривой, с параметром □. Тогда имеем:

,

,

Теперь для получения формулы вычисления кривизны кривой, заданной в полярных координатах, подставляем полученные выражения в формулу вычисления кривизны для параметрически заданной функции. Тогда окончательно, получаем

2.1.4 Радиус и центр кривизны

Определение 5. Величина R, обратная кривизне K линии в данной точке M, называется радиусом кривизны этой линии в рассматриваемой точке: R = 1/K, или

Рассмотрим в точке M нормаль к кривой, направленную в сторону вогнутости кривой, и отложим на ней отрезок MC, равный радиусу R кривизны кривой в точке M рис. 5.

Точка C называется центром кривизны данной кривой, а круг с центром в точке C (проходящий через точку M) называется кругом кривизны данной кривой в точке M.
Определение 6. Соприкасающаяся окружность, окружность кривизны́ – окружность, являющаяся наилучшим приближением заданной кривой в окрестности данной точки.
Из определения окружности кривизны следует, что в данной точке кривизна кривой и кривизна окружности кривизны равны между собой. Выведем формулы, определяющие координаты центра кривизны.

Рассмотрим кривую заданную уравнением y = f(x). Возьмём на кривой точку M(x, y) и найдём координаты ξ и

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1, «Наука», 1985.
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии (3-е издание). М. - Л.: ГИТТЛ, 1950
3. Фиников С.П. Дифференциальная геометрия. МГУ, 1961
4. Воднев В.Т. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии;
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. "Наука", 1967;
6. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. "Наука", 1980;
7. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970;

Эта часть работы выложена в ознакомительных целях. Если вы хотите получить работу полностью, то приобретите ее воспользовавшись формой заказа на странице с готовой работой:
https://studservis.ru/gotovye-raboty/kursovaya-rabota/162097