

Эта часть работы выложена в ознакомительных целях. Если вы хотите получить работу полностью, то приобретите ее воспользовавшись формой заказа на странице с готовой работой:

<https://studservis.ru/gotovye-raboty/referat/354817>

Тип работы: Реферат

Предмет: Высшая математика

1. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА 3
2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП: ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ 6
3. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ 7
4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП 10

Доказательство. Сначала исследуем аддитивную структуру алгебры с делением A .

Как мы видели, у каждого элемента из A есть некоторый минимальный аннулирующий многочлен $\mu_a(t)$, из рассуждений прошлого предложения видно, что он обязательно неприводим.

Так как многочлены мы рассматриваем над полем R , то неприводимые многочлены имеют вид

либо где

$$\mu_a(t) = t - \alpha,$$

$$\mu_a(t) = t^2 - 2\alpha t + \beta, \alpha^2 = \beta.$$

В первом случае $a \in R$. Если это не так, то положим $b = a\alpha$, получим тогда

$$\mu_b(t) = t^2 + (\beta - \alpha^2).$$

Значит, каждый элемент алгебры A имеет вид $\alpha + u$, где $\alpha \in R$, $u^2 = 0$

или $u^2 = \gamma \cdot 0$, $\gamma \in R$.

Для дальнейшего доказательства нам понадобится лемма.

Лемма 1. Подмножество

$$A' = \{u \in A \mid u^2 \in R, u^2 \leq 0\}$$

является векторным подпространством в A .

Теперь мы можем перейти к доказательству самой теоремы. Для $u \in A'$ запишем

где $q(u) \in R_+$.

$$u^2 = -q(u),$$

Кроме того, $q(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Очевидно, что

$$q(\alpha u) = \alpha^2 q(u)$$

и

$$f(u, v) := q(u + v) - q(u) - q(v) = -(uv + vu)$$

— симметричная билинейная форма на A , отвечающая положительно определенной квадратичной форме q .

Если $A = R$, то рассуждения заканчиваются.

Пусть $A \neq R$. Тогда $A' \neq 0$ и мы можем выбрать вектор $i \in A$, для которого $q(i) = 1$, т.е. $i^2 = -1$.

С точностью до изоморфизма получаем равенство

$$R[i] = C = R + Ri.$$

Если $A = C$, то наши рассуждения заканчиваются.

Теперь предположим, что A — шире, чем комплексные числа (как мы видели, мы можем считать, что $\mathbb{C} \subset A$).

В этом случае A' — шире, чем $\mathbb{R}i$, поэтому можно выбрать элемент

$j \perp \mathbb{R}i$, $q(j) = 1$.

В этом случае $j^2 = -1$ и $ij + ji = -f(i, j) = 0$, т.е. $ij = -ji$. Полагая

$k = ij$, получим $k^2 = -1$, $ik + ki = 0 = jk + kj$.

Следовательно, $k \in A'$ и $k \perp i, j$. Значит, $1, i, j, k$ линейно независимы

$\mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k = H$

— алгебра кватернионов.

Если A шире, чем алгебра кватернионов, то существует $l \in A'$ такое, что $q(l) = 1$ и $l \perp i, j, k$. Другими словами, $li = -il$, $lj = -jl$, $lk = -kl$.

Однако в силу ассоциативности умножения в A первые два соотношения дают

$lk = l(ij) = (li)j = -(il)j = -i(lj) = i(jl) = (ij)l = kl$.

Получается противоречие. Значит,

$A = H$.

-

Эта часть работы выложена в ознакомительных целях. Если вы хотите получить работу полностью, то приобретите ее воспользовавшись формой заказа на странице с готовой работой:

<https://studservis.ru/gotovye-raboty/referat/354817>