

Эта часть работы выложена в ознакомительных целях. Если вы хотите получить работу полностью, то приобретите ее воспользовавшись формой заказа на странице с готовой работой:

<https://studservis.ru/gotovye-raboty/otvety-na-bilety/359954>

Тип работы: Ответы на билеты

Предмет: Линейная алгебра

-

20. Теорема о числе векторов, входящих в базис. Ранг системы векторов.

Теорема . О числе векторов, входящих в базис. Любой базис системы векторов содержит одно и то же число векторов.

Число векторов, входящих в базис системы векторов, называется ран-гом системы векторов и обозначается буквой r .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система векторов имеет два базиса. Базис содержит m векторов, а базис содержит k векторов. Каждый из базисов представляет линейно независимую систему векторов и векторы каждого базиса разлагаются по векторам другого базиса. Поэтому по предыдущей теореме 3.3 $m \leq k$ и $k \leq m$.

Следовательно, $m = k$.

21. Теорема о двух системах векторов, которым соответствуют равно-сильные системы уравнений. Алгоритм нахождения базиса.

Теорема . О двух системах векторов, которым соответствуют равно-сильные системы уравнений.

Если двум системам векторов

(1)

(2)

соответствуют равносильные системы уравнений

(3)

(4)

и векторы образуют базис системы (2), то соответствующие векторы образуют базис системы (1) и при этом разложения соответствующих векторов систем по своим базисам совпадают, т. е. если

($j = r + 1, 2, \dots, n$), то

($j = r + 1, 2, \dots, n$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть () базис системы векторов (2). Покажем, что соответствующие этим векторам векторы системы (1) также образуют базис. Докажем от противного.

Предположим, что линейно зависимы, т. е. существует ненулевой набор чисел , такой, что . Дополним левую часть этого равенства слагаемыми , которые равны нулю. Равенство не нарушится.

.

Это равенство можно рассматривать как условие, подтверждающее то, что система уравнений (3) имеет ненулевое решение (, 0, ..., 0).

По условию теоремы системы уравнений (3) и (4) равносильные, т. е. это решение является также решением системы (4). Тогда

или при ненулевом наборе чисел , что возможно только при линейной зависимости векторов . Это противоречит условию теоремы. Следовательно, векторы линейно независимы.

Пусть далее известно разложение

($j = 1, 2, \dots, n$).

Покажем, что с такими же коэффициентами разлагается соответствующий вектор по векторам . Ввиду равносильности систем уравнений (3) и (4) из последнего равенства имеем

.

Отсюда получаем ($j = 1, 2, \dots, n$). Следовательно, векторы образуют базис первой системы векторов (1); причем коэффициенты разложений соответствующих векторов в системах (1) и (2) по своим базисам совпадают.

22. Теорема Кронекера - Капелли о совместности системы линейных уравнений.

Теорема. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

- расширенная матрица.

Для определения рангов обеих матриц достаточно привести расширенную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк и перестановки столбцов (кроме последнего).

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие утверждения:

1) Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т.е. $r(A) = n$, то система уравнений (1) имеет единственное решение.

2) Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т.е. $r(A) < n$, то система (1) неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Схема исследования системы m уравнений с n неизвестными

Система совместная, Система несовместная

если $r(A) = r(B) = r$. Если $r(A) < r(B)$.

Ответ: нет решений.

Система определена, Система неопределенна,

если $r = n$. Если $r < n$.

Ответ: единственное решение. Ответ: бесконечное множество решений.

23. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Теорема о числе векторов-решений, входящих в фундаментальную систему.

Система m линейных уравнений с n переменными называется системой линейных однородных уравнений, если все их свободные члены равны нулю. Такая система имеет вид:

(1)

Определение 1. Система линейно независимых решений $e_1, e_2, \dots, e_k$ называется фундаментальной, если каждое решение системы (1) является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, \dots, e_k$.

Теорема 1. Если ранг матрицы системы однородных уравнений r меньше числа неизвестных n , то система уравнений имеет фундаментальную систему решений, состоящую из $n - r$ векторов-решений.

Доказательство. Пусть система записана в виде

.

Если ранг матрицы системы равен r ($r(A) = r$), то равносильная разрешенная система уравнений содержит r уравнений и имеет вид

.

Так как $n > r$, то система имеет $n - r$ свободных неизвестных.

Задав свободным неизвестным значения 0 и 1, можно найти $n - r$ частных решений вида

, , ..., .

В этих векторах вместо значений базисных переменных поставлены точки, так как они в данном рассмотрении не имеют значения.

Покажем, что образуют фундаментальную систему решений. Чтобы доказать, что данные векторы являются линейно независимыми, составим линейную комбинацию

.

Данная линейная комбинация равна нулевому вектору только при . Это и подтверждает линейную независимость векторов.

Покажем, что любое решение системы уравнений является линейной комбинацией .

Составим вектор K , являющийся линейной комбинацией векторов с коэффициентами

.

Решения L и K при одних и тех же разрешенных неизвестных имеют одинаковые свободные неизвестные, следовательно, они совпадают ($L = K$), т. е.

.

-

Эта часть работы выложена в ознакомительных целях. Если вы хотите получить работу полностью, то приобретите ее воспользовавшись формой заказа на странице с готовой работой:

<https://studservis.ru/gotovye-raboty/otvety-na-bilety/359954>